

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

TRASPORTO DI UN FASCIO INTENSO IN UN SOLENOIDE

Relatore:

Prof. Armando Bazzani

Correlatore:

Prof. Giorgio Turchetti

Presentata da:

Domingo Verdini

Sessione III

Anno Accademico 2014/2015

Abstract

Lo scopo di questo lavoro è di studiare il problema del trasporto di una carica attraverso un solenoide. Il campo magnetico ha la caratteristica di essere nullo fuori dal solenoide, costante all'interno, con una transizione più o meno rapida. Quando la transizione è discontinua si può fornire una soluzione analitica associandovi una mappa di trasferimento. Negli altri casi la soluzione si ottiene con una integrazione numerica. Inoltre il solenoide si comporta come una lente cromatica, che può essere usata per selezionare la componente di un fascio con una determinata energia. Nel quadro dei dispositivi che utilizzano solenoidi per focalizzare un fascio di protoni, si descrive il modulo di trasporto a bassa energia denominato LEBT, che precede i dispositivi acceleranti presenti in un linac come quello di ESS. A tal fine si discute brevemente come gli effetti di carica spaziale attenuino il potere focalizzante di un solenoide. Una linea di trasporto LEBT è anche presente nel linac del progetto IFMIF, il cui scopo è analizzare il danneggiamento prodotto dai neutroni sui materiali che verranno impiegati nei reattori ITER e DEMO. In questo abstract non si segue l'ordine di presentazione dei vari argomenti data la diversa rilevanza che questi hanno nella trattazione che segue.

Indice

Introduzione	pag. 3
Capitolo 1 - Sorgenti di Neutroni e LEBT	pag. 5
1.1 Progetto IFMIF	pag. 5
1.2 Progetto ITER	pag. 6
1.3 Progetto ESS	pag. 7
1.4 Modulo LEBT	pag. 7
Capitolo 2 - Equazioni del moto in un solenoide	pag. 9
2.1 Soluzione esatta per campo con sharp edge	pag. 14
Capitolo 3 - Trasporto su una linea e focalizzazione	pag. 17
Capitolo 4 - Analisi quantitativa di focalizzazione e trasporto	pag. 21
Capitolo 5 - Formulazione Hamiltoniana e carica spaziale	pag. 26
Conclusioni	pag. 31
Appendice	pag. 34

Introduzione

La ricerca di una soluzione al problema delle fonti di energia accompagna da sempre la storia dell'uomo e permea ogni aspetto della società in cui viviamo. Tutto questo riguarda anche la fisica che, se da una parte indaga i costituenti fondamentali della natura, dall'altra parte è impegnata nello studio del problema dell'energia. E' quindi grazie agli sforzi congiunti delle comunità scientifiche internazionali che si è deciso di avviare la realizzazione in Francia di ITER, il primo reattore che dovrebbe dimostrare la fattibilità fisica della fusione nucleare controllata. ITER costituirà il ponte di lancio per le future tecnologie per la produzione di energia elettrica ad uso civile minimizzando gli impatti ambientali.

Uno dei punti critici del progetto è lo studio del danneggiamento strutturale del reattore causato dai flussi intensi di neutroni prodotti dalle reazioni di fusione. A tal fine è stato avviato il progetto IFMIF per la realizzazione di una sorgente di neutroni il cui flusso è confrontabile con quello del reattore. Nel capitolo 1 si danno alcuni dettagli riguardanti questo progetto. Successivamente si passa alla presentazione di un'altra sorgente di neutroni in fase di realizzazione nell'ambito del progetto ESS. Questo progetto si basa su un linac che accelera fasci di protoni fino ad energie dell'ordine del GeV; anche in questo caso i neutroni sono prodotti mediante il processo di spallazione. Il trasporto di un fascio di protoni ben collimato, dalla sorgente al primo dispositivo accelerante, viene realizzato tramite il modulo LEBT.

Il controllo dei parametri essenziali del fascio, quali la divergenza e l'emittanza nel LEBT, si realizza utilizzando dei solenoidi che generano un campo magnetico focalizzante con specifiche condizioni ai bordi. Come viene discusso a partire dal capitolo 2, la propagazione del fascio nelle condizioni di (a) approssimazione parassiale della direzione del moto, (b) alla presenza di un campo discontinuo di tipo sharp edge con simmetria cilindrica e (c) in assenza degli effetti di repulsione coulombiana fra le particelle, viene tradotto formalmente in equazioni del moto di tipo hamiltoniano di cui si fornisce la soluzione analitica esatta corrispondente ad una mappa di trasferimento. Il passo successivo è la costruzione della mappa di trasferimento per una linea di trasporto composta da un numero arbitrario di solenoidi come nel caso del modulo LEBT che ne contiene due.

Il trasporto sulla linea caratterizza l'effetto di focalizzazione di un solenoide. Nel capitolo 3 si mostra come un fascio monoenergetico puntiforme venga trasportato da un solenoide. Il risultato in approssimazione di lente sottile è identico a quello ottenuto nel caso dell'ottica tradizionale. In particolare la proprietà di cromaticità della lente solenoidale permette di utilizzare una linea di trasporto per la selezione in energia.

Dopo aver svolto la trattazione analitica del trasporto di carica, nel capitolo 4 si confronta il risultato analitico con il risultato numerico ottenuto con un integratore Runge Kutta del quarto ordine.

Infine la presentazione si conclude con cenni al problema della carica spaziale che riduce il potere focalizzante del solenoide. Ciò avviene perché la presenza di carica spaziale attenua la frequenza dell'oscillatore armonico isotropo associato alla particella nel campo del solenoide; questo effetto viene trattato utilizzando il formalismo hamiltoniano. Considerando come "sistema fisso" per l'oscillatore quello di Larmor, e come "sistema rotante" quello del laboratorio, si possono valutare gli effetti repulsivi della interazione coulombiana tra i protoni. Si ricerca una soluzione autoconsistente in cui il fascio ha una distribuzione uniforme in un cilindro a cui corrisponde un campo elettrico lineare che esercita sulla particella una forza radiale repulsiva. Per ridurre gli effetti della carica spaziale nel dispositivo LEBT si introduce un gas a bassa pressione che viene ionizzato dal fascio e gli elettroni neutralizzano parzialmente la carica spaziale dei protoni. La trattazione di questi effetti esula completamente dagli obiettivi di questo lavoro.

Vorrei infine ringraziare il Prof. Giorgio Turchetti e il Dott. Stefano Sinigardi per il loro prezioso aiuto nello sciogliere i problemi affrontati nella seguente trattazione.

Capitolo 1

Sorgenti di Neutroni e LEB

Le sorgenti di neutroni sono una risorsa indispensabile per lo studio della struttura microscopica dei materiali tramite procedure di spettroscopia. Inoltre, sorgenti intense di neutroni vengono anche utilizzate per studiare il danneggiamento di materiali.

Queste sorgenti si possono realizzare in laboratorio attraverso la collisione di fasci intensi di ioni leggeri su bersagli utilizzando il meccanismo di emissione di neutroni tramite spallazione.

La comunità europea sta sviluppando due progetti, a tal fine, denominati ESS (European Spallation Source) ed IFMIF (International Fusion Materials Irradiation Facility). La prima, in fase di realizzazione a Lund (Svezia), è destinata a studi di spettroscopia tramite diffrazione di neutroni. La seconda, invece, sarà dedicata allo studio del danneggiamento da irradiazione neutronica finalizzata alla valutazione della vita media dei componenti dei reattori a fusione ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor) in fase di realizzazione.

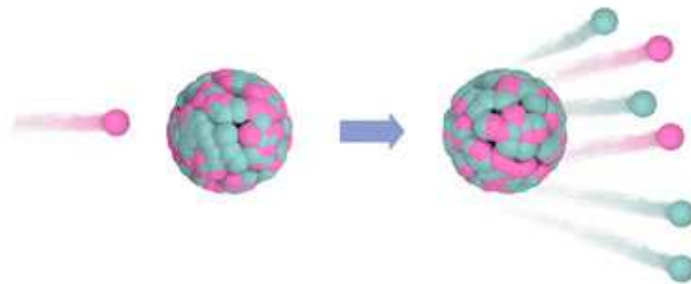


Figura 1 Spallazione di un nucleo eccitato

1.1 Progetto IFMIF

I materiali utilizzati nel progetto ITER (in particolare berillio *Be*, rame *Cu* e acciaio inossidabile) saranno soggetti a flussi di neutroni molto elevati prodotti dalle reazioni di fusione Deuterio-Trizio, che producono neutroni da 14 MeV.

Le collisioni anelastiche tra i neutroni e gli atomi del reticolo cristallino producono delle dislocazioni, causa del degrado delle proprietà meccaniche di questi materiali. Per questa ragione, parallelamente allo sviluppo del reattore, che dovrà studiare la fisica dell'iniezione e del plasma in condizioni stazionarie di fusione, è stato avviato lo studio degli effetti di danneggiamento tramite sorgenti di neutroni di spallazione.

Il progetto internazionale IFMIF si basa su due acceleratori lineari (linac) di energia massima 40 MeV e corrente di 2×125 mA, che andranno ad impattare su bersagli di Litio. I parametri di funzionamento sono stati scelti per massimizzare il flusso di neutroni e raggiungere condizioni comparabili con quelle realizzate all'interno del toroide che costituisce l'elemento centrale di un tokamak per il confinamento magnetico di un plasma da fusione.

1.2 Progetto ITER

Il progetto ITER è volto allo studio dell'iniezione di un plasma ed al raggiungimento della condizione stazionaria di fusione a confinamento magnetico. L'obiettivo è quello di stabilire le condizioni fisiche per la realizzazione del successivo esperimento DEMO, prototipo di un reattore commerciale a fusione a confinamento magnetico.

La fusione termonucleare si propone come la tecnologia in grado di produrre energia pulita, con modesti danni ambientali dovuti alle scorie radioattive, essendo questi limitati ai materiali strutturali delle centrali stesse, irradiati durante il funzionamento.

Il confinamento del plasma avviene attraverso i campi magnetici generati da strutture superconduttive. Un parametro fondamentale è il rapporto tra la quantità di energia prodotta dalle reazioni di fusione e quella necessaria per riscaldare il plasma e mantenerlo in condizioni stazionarie. Il guadagno atteso con ITER è di circa un fattore 10, ossia una potenza prodotta dalle reazioni di fusione pari a 500 MW, a fronte di una potenza in ingresso di 50 MW. Lo studio del riscaldamento del plasma, il controllo delle sue instabilità e la diagnostica di ogni fase di funzionamento sono fondamentali per potere sviluppare le tecnologie che consentiranno di costruire il reattore dimostrativo DEMO e successivamente centrali elettriche commerciali a fusione.

La fusione è una reazione nucleare in cui due nuclei leggeri si fondono in un nucleo più pesante con conseguente rilascio di energia. Si tratta della reazione che alimenta il sole e tutte le stelle, cioè delle reazioni di nucleosintesi che producono tutti gli elementi a partire dall'idrogeno fino al ferro-nichel.

La reazione di fusione richiede una quantità notevole di energia per superare la barriera coulombiana, avvicinando i due nuclei reagenti, entrambi carichi positivamente, permettendo di raggiungere una distanza alla quale si manifestano le interazioni nucleari. Infatti, nel caso in cui i due nuclei si trovino a distanze dell'ordine della loro stessa dimensione (10^{-15} m), l'interazione nucleare forte, attrattiva, rende possibile il processo di fusione. Fra le reazioni di fusione conosciute, si è trovato che la reazione di fusione più efficiente in laboratorio è quella tra due isotopi pesanti dell'idrogeno, deuterio 2H o D , il cui nucleo contiene un protone ed un neutrone, e trizio 3H o T , il cui nucleo contiene un protone e

due neutroni.

Riscaldando i nuclei stessi si fornisce loro la necessaria energia per innescare la reazione. La temperatura misura la energia cinetica media delle particelle di una sostanza. Con temperature corrispondenti ad energie superiori alla energia di ionizzazione degli atomi si ha una apprezzabile frequenza di eventi di fusione.

Considerando la reazione ($50\%D, 50\%T$), con una densità n ed una temperatura T , si ha un guadagno $Q > 1$ per $nT\tau_E > 10^{21} \text{ m}^{-3}\text{KeV}\cdot\text{s}$, dove τ_E è il tempo di confinamento. Tale relazione è nota come Criterio di Lawson.

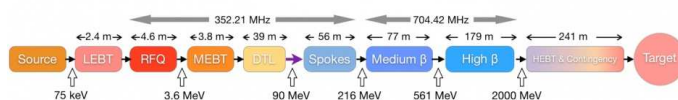
1.3 Progetto ESS

Il progetto ESS (European Spallation Source) rappresenta una nuova generazione di sorgente di neutroni prodotti in modo pulsato, tramite i quali si andranno a studiare le strutture atomiche di base con potere risolutivo superiore a quello di tutte le precedenti sorgenti di neutroni.

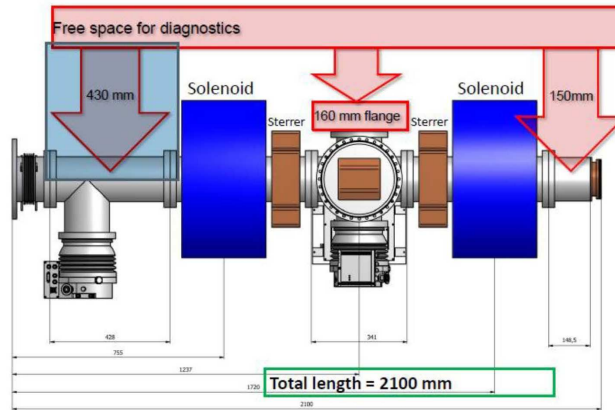
In sostanza le particelle vengono accelerate per poi urtare bersagli di spallazione metallo-liquidi o leghe metallo-liquide pesanti in modo da avere un rilevante tasso di produzione di 20 – 30 neutroni per protone incidente.

1.4 Modulo LEBT

Il fascio di particelle accelerato è costituito da protoni e l'acceleratore è lineare (linac). Quest'ultimo è costituito da una sorgente convenzionale MDIS (Microwave Discharge Ion Source), in grado di emettere macro impulsi fino a 2 ms di lunghezza e correnti fino a 90 mA. Il fascio uscente dalla sorgente deve essere trasportato fino alla prima struttura accelerante, l'RFQ (Radio Frequency Quadrupole). A tal fine occorre una linea di trasporto a bassa energia, che consenta di attenuare le perdite dovute alla repulsione coulombiana e quindi agli effetti di carica spaziale, mantenendo il fascio focalizzato. In questa linea, chiamata LEBT (Low Energy Beam Transport), tramite l'interazione del fascio col gas residuo, avviene una parziale neutralizzazione del fascio stesso.

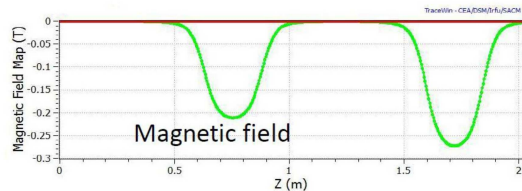


Componenti di ESS



Modulo LEBT

Nella figura sopra, si dà uno schema che descrive il modulo: una regione vuota D1, un primo solenioide L1, una regione vuota del Chopper D2, un secondo solenoide L2, un'ultima regione vuota D2. Si considerano i protoni in ingresso a $E=75$ KeV, cui corrisponde $\beta = 0.012$, che vanno a formare bunch (pacchetti) la cui durata è $\tau = 3$ ms, pari ad una estensione spaziale $L = c\beta\tau = 10$ Km. È misurata una corrente di picco $I_p = 70$ mA; il numero di p totale nel bunch è $N = 1.2 \times 10^{15}$ protoni, corrispondente a $N_{unit} = 10^9$ protoni per cm^{-1} . L'apertura del collimatore all'ingresso del LEBT è di $r_x = r_y = 1$ mm e la divergenza del fascio è pari a 16 mrad. La lunghezza complessiva del modulo è di circa 2 m.



Campo magnetostatico

Successivamente al LEBT, il fascio entra nel modulo RFQ, che accelera i protoni del fascio da 75 keV fino a 3 MeV. Il fascio così accelerato giunge alla sezione denominata MEBT (Medium Energy Beam Transport), un insieme di 10 quadrupoli, il cui compito è mantenere un'alta qualità del fascio, con un impulso ben definito nel tempo, una bassa emittanza ed un alone minimizzato, allo scopo di massimizzare l'affidabilità di ESS. Al passaggio successivo la componente DTL (Drift Tube Linac) accelera il fascio di p dall'energia iniziale di 3 MeV fino a 80 MeV di energia. All'uscita del DTL i Superconducting Spoke Resonators portano il fascio da 80 MeV a 201 MeV di energia. All'uscita dagli Spokes i due moduli successivi portano definitivamente il fascio all'energia finale, pari a 2500 MeV. Il fascio è pronto per essere trasportato ai target costituiti da anelli di mercurio Hg , piombo Pb o tungsteno W .

Capitolo 2

Equazioni del moto in un solenoide

La progazione del fascio nel modulo LEBT viene qui considerata tenendo conto del campo esterno dovuto al solenoide ed ignorando la repulsione coulombiana. Data la simmetria assiale del campo magnetico solenoidale il sistema presenta due integrali primi e la soluzione delle equazioni del moto può essere ottenuta solo per via numerica. Se le deviazioni delle traiettorie rispetto alla traiettoria di riferimento, costituita dall'asse del solenoide, sono piccole, la approssimazione parassiale consente di semplificare le equazioni del moto considerando solo la loro proiezione sul piano ortogonale ed assumendo che la velocità di propagazione lungo l'asse z sia costante. Si può introdurre un sistema rotante attorno all'asse z in cui il moto della particella è quello di un oscillatore. Nell'approssimazione di sharp edge, in cui il campo magnetico è nullo fuori dal solenoide e costante dentro di questo, si ottiene una soluzione analitica per la mappa di trasferimento nel solenoide, che caratterizza l'effetto focalizzante dovuto a questo dispositivo [8,9]. In questa approssimazione si determina analiticamente anche la mappa di trasferimento di una linea costituita da più di un solenoide come nel caso del LEBT, e si può confrontare il risultato con la soluzione numerica. La presenza di carica spaziale riduce la frequenza dell'oscillatore e di conseguenza il potere focalizzante del solnoide [9,10]. Questo viene brevemente illustrato nell'ultimo capitolo.

Consideriamo il campo prodotto da un solenoide di lunghezza L , che ha campo magnetico uniforme all'interno $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$ dove z è il suo asse. Il campo di bordo è quello che determina le proprietà di focalizzazione del solenoide. In sua assenza si avrebbe solo una rotazione. Cominciamo con l'imporre che il campo sia solenoidale $\text{div } \mathbf{B} = 0$ usando coordinate cilindriche e assumendo che si abbia simmetria per rotazioni attorno all'asse z ossia che

$$\mathbf{B} = B_r(r, z) \mathbf{e}_r + B_z(z) \mathbf{e}_z$$

Dato che il campo magnetico s

$$\text{div } \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r B_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

Supponendo che B_r sia regolare in $r = 0$ affinché $r B_r$ si annulli in $r = 0$, integrando si trova

$$r B_r = - \int_0^r r' B'_z(z) dr' \quad B_r = - \frac{r}{2} B'_z(z)$$

Il potenziale vettore è dato da

$$\mathbf{A} = \frac{r}{2} B_z \mathbf{e}_\phi$$

Infatti calcolandone il rotore si ottiene

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = - \frac{r}{2} B'_z \mathbf{e}_r + B_z \mathbf{e}_z = B_r \mathbf{e}_r + B_z \mathbf{e}_z$$

Equazioni in forma cartesiana

Notiamo che in coordinate cartesiane abbiamo

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_r B_r + \mathbf{e}_z B_z = -\left(\frac{x}{r}\mathbf{e}_x + \frac{y}{r}\mathbf{e}_y\right) \frac{r}{2} B'_z + \mathbf{e}_z B_z = -\frac{x}{2} B'_z \mathbf{e}_x - \frac{y}{2} B'_z \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z B_z$$

Di conseguenza la forza di Lorentz è data da $\mathbf{F} = e/c \mathbf{v} \times \mathbf{B} = F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z$ dove la forma esplicita delle componenti è data da

$$F_x = \frac{e}{c} \dot{y} B_z + \frac{e}{2c} y \dot{z} B'_z \quad F_y = -\frac{e}{c} \dot{x} B_z - \frac{e}{2c} x \dot{z} B'_z \quad F_z = \frac{e}{2c} B'_z (x \dot{y} - y \dot{x})$$

Le equazioni del moto in coordinate cartesiane si scrivono

$$\begin{cases} m \ddot{x} = \frac{e}{c} \dot{y} B_z + \frac{e}{2c} y \dot{z} B'_z \\ m \ddot{y} = -\frac{e}{c} \dot{x} B_z - \frac{e}{2c} x \dot{z} B'_z \\ m \ddot{z} = \frac{e}{2c} B'_z (x \dot{y} - y \dot{x}) \end{cases} \quad (1.1)$$

dove $B'_z = dB_z/dz$. Scriviamo la componente z del campo magnetico nella forma seguente

$$B_z(z) = B_0 f(z)$$

dove $f(z)$ definisce il profilo del solenoide e vale 0 fuori dal solenoide, 1 dentro questo ed ha in gnerale una transizione dolce che descrive l'effetto del campo di bordo (fringe field).

Fringe field

Dato un solenoide di lunghezza finita L la funzione $f(z)$ ha la seguente forma

$$f(z) = H(z) - H(z - L)$$

dove $H(z)$ è una funzione monotona crescente tale che $H(-\infty) = 0$, $H(+\infty) = 1$, $H(0) = 1/2$. Per $H(z)$ scegliamo la seguente rappresentazione

$$H(z) = \frac{1}{1 + e^{-x/\eta}} = \frac{1 + \text{th}\left(\frac{x}{2\eta}\right)}{2}$$

La derivata prima vale

$$H'(z) = \frac{1}{\lambda} \frac{e^{-x/\lambda}}{(1 + e^{-x/\lambda})^2} = \frac{1}{4\lambda} \frac{1}{\text{ch}^2\left(\frac{x}{2\lambda}\right)}$$

Il parametro η misura la estensione dell'intervallo di salita. Detta $\vartheta(z)$ la funzione a gradino di Heaviside che vale 0 per $z < 0$ e vale 1 per $z > 0$ si ha che

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} H(z) = \vartheta(z) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} H'(z) = \delta(z)$$

dove $\delta(z)$ è la funzione δ di Dirac.

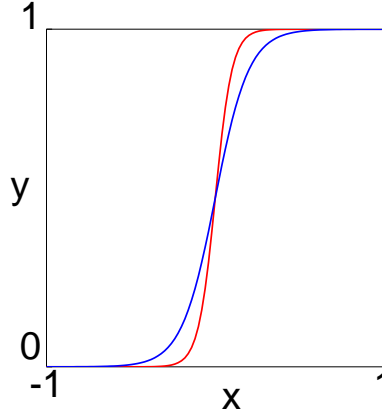


Figura 0 Funzione $H(z)$ con $\eta = 0.05$ in rosso, con $\eta = 0.1$ in blu

Soluzione delle equazioni del moto

Queste equazioni possono essere integrate numericamente e visto che in una macchina lineare si considera un singolo passaggio attraverso il solenoide, un metodo come Runge-Kutta del quarto ordine è adeguato per ottenere un risultato accurato a patto di scegliere il passo temporale sufficientemente piccolo da risolvere bene le variazioni del campo dovute al fringe field. Quello che interessa non è tanto la evoluzione temporale quanto la geometria dell'orbita. A tal fine si passa ad una rappresentazione dell'orbita della forma

$$x = x(z) \quad y = y(z) \quad x'(z) = \frac{dx}{dz} = \frac{\dot{x}}{\dot{z}} \quad y'(z) = \frac{dy}{dz} = \frac{\dot{y}}{\dot{z}}$$

Le particelle del fascio si muovono lungo l'asse z e le loro deviazioni rispetto all'asse z sono piccole. Questo implica che le componenti della velocità lungo gli assi x e y sono molto piccole rispetto alla componente lungo z . Ne segue che quest'ultima è quasi costante. L'approssimazione parassiale corrisponde ad assumere che sia

$$\dot{z} = v_0$$

e a porre quindi $\ddot{z} = 0$ nel sistema di equazioni scritto sopra. Ci si riconduce quindi ad un sistema di due equazioni nelle sole componenti x, y .

Siccome siamo interessati alla geometria dell'orbita piuttosto che alla evoluzione temporale, cambiamo la variabile indipendente passando dal tempo t alla ascissa curvilinea s definita da

$$s = \int_0^t v dt \simeq v_0 t$$

La approssimazione parassiale ci consente di scrivere

$$s = z = v_0 t$$

Le derivate diventano

$$x' \equiv \frac{\dot{x}}{v_0} \quad x'' = \frac{\ddot{x}}{v_0^2}$$

Dividendo per mv_0^2 le equazioni in x e y e tenendo conto che $\dot{z} = v_0$ si ottiene

$$\begin{cases} x'' = \frac{e}{mcv_0} \frac{\dot{y}}{v_0} B_z + \frac{e}{2mcv_0} y B'_z \\ y'' = -\frac{e}{mcv_0} \frac{\dot{x}}{v_0} B_z - \frac{e}{2mcv_0} x B'_z \end{cases} \quad (1.2)$$

Essendo passati ad s come variabile indipendente è naturale che si passi dalla frequenza di Larmor temporale ω_L ad una frequenza di Larmor spaziale Ω_L definita da

$$\Omega_L = \frac{\omega_L}{c} = \frac{eB_0}{2mc^2}$$

Data la forma delle equazioni (2.0) introduciamo una diversa frequenza che differisce da Ω_L per il fattore $\beta_0 = v_0/c$. Ricordiamo che abbiamo posto

$$B_z(s) = B_0 f(s)$$

dove B_0 è il valore massimo del campo e $f(s)$ definisce la variazione. Introduciamo quindi la frequenza spaziale

$$\omega(s) = \omega_0 f(s) \quad \omega_0 = \frac{eB_0}{2mc^2\beta_0} \quad (1.3)$$

Essendo i protoni del fascio non relativistici β_0 è dato da

$$\beta_0 = \left(\frac{2 E(\text{MeV})}{938} \right)^{1/2}$$

Si noti che la frequenza ω_0 varia con l'energia della particella e questo comporta che il potere focalizzante del solenoide dipende dalla energia della particella. Quindi il solenoide si comporta come una lente cromatica, esito che risulterà evidente nel seguito. Esprimeremo nel seguito le lunghezze in cm e quindi è conveniente dare la relazione che esprime ω_0 in cm^{-1} dato il campo magnetico B_0 espresso in Tesla. Essendo β_0 adimensionale diamo il valore per $eB_0/(mc^2)$ in cm^{-1} per un campo magnetico B_0 espresso in Tesla

$$\frac{eB_0}{mc^2} = 0.003195 B(\text{Tesla}) \text{ cm}^{-1}$$

Osservazione

Per verificare questa formula calcoliamo le varie quantità nel sistema cgs elettromagnetico. La unità di carica è l'esu o statcoulomb dove $1 \text{ esu} = 3.33564 \times 10^{-10} \text{ C}$. In tal modo la carica elettrica del protone è $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 4.8027 \times 10^{-10} \text{ esu}$. La massa del

protone è $m = 1.6726231 \times 10^{-24}$ g per cui essendo $c = 2.99792 \times 10^{10}$ m/s si trova che $mc^2 = 1.503274 \times 10^{-3}$ erg. Nel sistema cgs elettrostatico il campo magnetico si misura in Gauss. Notando che eB_0/mc^2 ha come dimensioni l'inverso di una lunghezza, trattandosi di una frequenza spaziale, il risultato sarà espresso in cm^{-1}

$$\frac{eB_0}{mc^2} = \frac{4.8027 \times 10^{-10}}{1.503274 \times 10^{-3}} = 3.1948 \times 10^{-7} \text{ B(Gauss)cm}^1 = 3.1948 \times 10^{-3} \text{ B(Tesla)cm}^{-1}$$

Infatti abbiamo che $\text{B(Gauss)} = 10^4 \text{ B(Tesla)}$ poiché $1 \text{ Gauss} = 10^{-4} \text{ Tesla}$.

Una lunghezza tipica per un solenoide sono 20 cm ed un campo è di 10 Tesla per una particella di energia $E = 10 \text{ Mev}$ cui corrisponde $\beta_0 = 0.14$ si trova che $\omega_0 = 0.11 \text{ cm}^{-1}$.

Equazioni nel riferimento di Larmor

Le equazioni del moto in approssimazione parassiale si scrivono nella forma seguente

$$\begin{cases} x'' = 2\omega y' + \omega' y \\ y'' = -2\omega x' - \omega' x \end{cases} \quad (1.4)$$

Introducendo la variabile complessa $Z = x - iy$ otteniamo

$$Z'' = 2i\omega Z' + i\omega' Z \quad (1.5)$$

Passiamo al sistema rotante mediante una rotazione di un angolo $\Phi(s)$ ed indichiamo con x_L, y_L le coordinate nel sistema rotante e $Z_L = x_L - iy_L$

$$Z = Z_L e^{i\Phi} \quad \Phi(s) = \int_0^s \omega(s') ds' \quad (1.6)$$

La derivata prima è

$$Z' = Z_L' e^{i\Phi} + i\omega Z_L e^{i\Phi} \quad (1.7)$$

e la derivata seconda vale

$$Z'' = Z_L'' e^{i\Phi} + 2i\omega Z_L' e^{i\Phi} + i\omega' Z_L e^{i\Phi} - \omega^2 Z_L e^{i\Phi}$$

Dividendo per $e^{i\phi}$ le equazioni del moto diventano

$$Z_L'' + 2i\omega Z_L' + i\omega' Z_L - \omega^2 Z_L = 2i\omega Z_L' - 2\omega^2 Z_L + i\omega' Z_L$$

Semplificando nella precedente espressione si ottiene

$$Z_L'' + \omega^2 Z_L = 0 \quad (1.8)$$

Questa è l'equazione di un oscillatore di frequenza variabile $\omega(s)$. All'interno del solenoide dove $\omega(s) = \omega_0$ è costante abbiamo un semplice oscillatore armonico a frequenza costante. Nelle coordinate x_L, y_L l'ultima equazione diventa

$$\begin{cases} x_L'' + \omega^2 x_L = 0 \\ y_L'' + \omega^2 y_L = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

2.1 Soluzione esatta per campo con sharp edge

Nel caso in cui il campo del solenoide è discontinuo si ottiene analiticamente la soluzione esatta per l'orbita di una carica dentro e fuori del solenoide. Supponiamo che il solenoide sia lungo L e che il campo sia $B_z = B_0 f(s)$ dove $f = 1$ per $0 < s < L$ e $f = 0$ fuori da questo intervallo. Usando la funzione $\vartheta(s)$ di Heaviside che vale 0 per $s < 0$ e vale 1 per $s > 0$ scriviamo

$$f(s) = \vartheta(s) - \vartheta(s - L)$$

L'effetto di foccheggiamento dovuto alla transizione del campo magnetico resta perché la derivata di $f(s)$ è data da

$$f'(s) = \delta(s) - \delta(s - L)$$

Dalla relazione

$$\omega(s) = \omega_0 f(s) \quad \Phi(s) = \int_0^s \omega(s') ds'$$

segue che

$$\Phi(s) = \begin{cases} 0 & \text{for } s \leq 0 \\ \omega_0 s & \text{for } 0 \leq s \leq L \\ \omega_0 L & \text{for } s \geq L \end{cases} \quad \Phi'(s) = \begin{cases} 0 & \text{for } s < 0 \\ \omega_0 & \text{for } 0 < s < L \\ 0 & \text{for } s > L \end{cases} \quad (2.1)$$

L'angolo $\Phi(s)$ che dà la rotazione di Larmor è una funzione continua mentre la sua derivata prima $\Phi'(s)\omega_0 f(s)$ è discontinua come il campo magnetico.

Le equazioni di evoluzione nel sistema del laboratorio sono date da (1.4) o (1.5) mentre la evoluzione nel sistema di Larmor è governata da (1.9) o (1.8). Tenendo conto che $\omega(s)$ ha una discontinuità in $s = 0, L$ questo implica che $x_L''(s), y_L''(s)$ sono anch'esse discontinue ma $x_L'(s), y_L'(s)$ sono continue negli stessi punti e quindi anche $x_L(s), y_L(s)$ sono continue. Invece $x''(s), y''(s)$ si comportano come $f'(s)$ e quindi $x'(s), y'(s)$ hanno in $x = 0, L$ una discontinuità. Invece $x(s), y(s)$ sono continue in questi punti. Dalla (1.6) possiamo valutare il salto di $x'(s), y'(s)$ in $s = 0$ e in $s = L$. Esamineremo questo in dettaglio nella appendice. Al momento ci interessa solo di calcolare la mappa di trasferimento per

il solenoide che risulta definito da

$$\begin{pmatrix} x(L) \\ x'(L+0) \\ y(L) \\ y'(L+0) \end{pmatrix} = M_S \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0-0) \\ y(0) \\ y'(0-0) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

dove abbiamo usato la seguente notazione per il limite a sinistra e a destra di una funzione

$$g(s+0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g(s+\epsilon) \quad g(s-0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g(s-\epsilon)$$

Per calcolare M notiamo che (1.7) implica $Z'(s) = Z'_L(s)e^{i\Phi(s)}$ fuori dal solenoide, ossia per $s < 0$ e $s > L$. Infatti in questa regione il campo è nullo e quindi $\omega(s) = 0$. Inoltre da (1.6) segue che $Z(s) = Z_L(s)e^{i\Phi(s)}$ dovunque. Espresse in coordinate reali queste relazioni diventano

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = R(\Phi(s)) \begin{pmatrix} x_L(s) \\ y_L(s) \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix} = R(\Phi(s)) \begin{pmatrix} x'_L(s) \\ y'_L(s) \end{pmatrix} \quad s < 0, s > L$$

dove $R(\Phi)$ è la matrice di rotazione di un angolo Φ .

$$R(\Phi) = \begin{pmatrix} \cos(\Phi) & \sin(\Phi) \\ -\sin(\Phi) & \cos(\Phi) \end{pmatrix}$$

Per calcolare la mappa di trasferimento osserviamo prima dell'ingresso nel solenoide ossia in $s = 0 - \epsilon$ per $\epsilon \rightarrow 0$ si ha $\Phi = 0$ e quindi

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_L(0) \\ y_L(0) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x'(0-0) \\ y'(0-0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_L(0) \\ y'_L(0) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Per x'_L, y'_L la valutazione è fatta in $s = 0$ in quanto sono continue. Analogamente appena fuori dal solenoide ossia in $s = L + \epsilon$ per $\epsilon \rightarrow 0$ si ha $\Phi(L) = \omega_0 L$ e quindi

$$\begin{pmatrix} x(L) \\ y(L) \end{pmatrix} = R(\alpha) \begin{pmatrix} x_L(L) \\ y_L(L) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x'(L+0) \\ y'(L+0) \end{pmatrix} = R(\alpha) \begin{pmatrix} x'_L(L) \\ y'_L(L) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

dove abbiamo posto

$$\alpha = \Phi(L) = \omega_0 L$$

Per x'_L, y'_L la valutazione è fatta in $s = L$ in quanto sono continue.

Per ottenere la mappa di trasferimento nel sistema fisso è quindi sufficiente calcolare la mappa di trasferimento tra $s = 0$ e $s = L$ nel sistema di Larmor. Questo è molto semplice perché le equazioni di evoluzione (1.8) sono quelle di un oscillatore armonico. Il risultato è dato da

$$\begin{pmatrix} x_L(L) \\ x'_L(L) \end{pmatrix} = F(L) \begin{pmatrix} x_L(0) \\ x'_L(0) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y_L(L) \\ y'_L(L) \end{pmatrix} = F(L) \begin{pmatrix} y_L(0) \\ y'_L(0) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

dove

$$F(s) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 s) & \omega_0^{-1} \sin(\omega_0 s) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 s) & \cos(\omega_0 s) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Da (2.2), (2.3) e (2.4) tenendo conto della espressione di F data da (2.5) si ottiene il risultato finale per la mappa di trasferimento.

$$\begin{pmatrix} x(L) \\ x'(L+0) \\ y(L) \\ y'(L+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 & \omega_0^{-1}CS & CS & \omega_0^{-1}S^2 \\ -\omega_0CS & C^2 & -\omega_0S^2 & CS \\ -CS & -\omega_0^{-1}S^2 & C^2 & \omega_0^{-1}CS \\ \omega_0S^2 & -CS & -\omega_0CS & C^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0-0) \\ y(0) \\ y'(0-0) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Capitolo 3

Trasporto su una linea e focalizzazione

Una line di trasporto è costituita da uno o più solenoidi e tratti in cui non c'è campo magnetico. Nel caso in cui i solenoidi siano trattati nella approssimazione di sharp edge, si può dare una espressione analitica alla mappa di trasferimento lungo la linea. Confrontando (2.1) con (2.6) si ha la espressione esplicita della mappa di trasferimento lungo la linea M_L che dipende dalla campo e dalla lunghezza del solenoide, oltre che da β_0 ossia dalla energia della particella. Chiamiamo drift un tratto di lunghezza s in cui non c'è campo magnetico. In questo caso le equazioni del moto sono

$$x'' = 0 \qquad y'' = 0$$

la cui soluzione è

$$x(s) = x_0 + s x'_0 \qquad x'(s) = x'_0 \qquad y(s) = y_0 + s y'_0 \qquad y'(s) = y'_0$$

dove x_0, y_0 sono le coordinate a $s = 0$ e x'_0, y'_0 le loro derivate prime. Indicando con $M_D(s)$ la mappa di trasferimento scriviamo

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \\ y(s) \\ y'(s) \end{pmatrix} = M_D \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} \qquad M_D = \begin{pmatrix} 1 & s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

La matrice M_D è una matrice a blocchi 2×2 identici

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y(s) \\ y'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Se ad esempio abbiamo un drift di lunghezza D ed un solenoide di lunghezza L seguito da un drift di lunghezza D_1 , la mappa di trasferimento da $s = 0$ a $s = D + L + D_1$ si scrive come composizione delle corrispondenti mappe che essendo lineari sono date dalle corrispondenti matrici

$$M = M_{D_1} M_S M_D \quad (3.3)$$

Come prima applicazione calcoliamo la distanza focale del solenoide ossia la lunghezza del drift D tale che un fascio puntiforme esce dal solenoide nella forma di un fascio parallelo. Questo si ottiene imponendo che all'uscita del solenoide si abbia $x' = y' = 0$. Poiché all'uscita del solenoide x', y' sono ottenuti tramite una rotazione di x'_L, y'_L è sufficiente che imponiamo che questi si annullino. Nel primo drift la rotazione è nulla e quindi le coordinate e le loro derivate prime o momenti sono uguali nei due riferimenti. Pertanto nel piano di fase orizzontale (x, x') abbiamo

$$\begin{pmatrix} x_L(D) \\ x'_L(D) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(D) \\ x'(D-0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + x'_0 D_1 \\ x'_0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

alla fine del solenoide nel sistema di Larmor abbiamo

$$\begin{pmatrix} x_L(D+L) \\ x'_L(D+L) \end{pmatrix} = F(L) \begin{pmatrix} x_L(D) \\ x'_L(D) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

ed espressioni analoghe si hanno con un piano di fase verticale y, y' . Se il fascio in $s = 0$ è puntiforme ossia $x_0 = y_0 = 0$ si trova che

$$\begin{pmatrix} x_L(D+L) \\ x'_L(D+L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 L) & \omega_0^{-1} \sin(\omega_0 L) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 L) & \cos(\omega_0 L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Dx'_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

I momenti x'_L, y'_L alla fine del solenoide sono dati da

$$x'_L(D+L) = Gx'_0 \quad y'_L(D+L) = Gy'_0 \quad (3.7)$$

dove

$$G = \cos(\omega_0 L) - \omega_0 D \sin(\omega_0 L) \quad (3.8)$$

La condizione che i raggi siano paralleli è che $x'(D+L+0) = y'(D+L+0) = 0$ e risulta soddisfatta se $x'_L(D+L) = y'_L(D+L) = 0$. Quindi i raggi sono paralleli se e solo se $G = 0$ ossia se

$$D = \frac{1}{\omega_0 \tan(\omega_0 L)} \quad (3.9)$$

In questo caso D è la distanza focale del solenoide.

Focalizzazione con lente sottile

Se mandiamo ora L a zero mantenendo $\omega_0^2 L = 1/f$ costante ossia $\omega_0 \sim L^{-1/2}$ troviamo che $\omega_0 L$ va a zero e questo limite corrisponde alla lente sottile. In questo limite l'angolo di rotazione $\alpha = L\omega_0$ tende a zero. Il sistema di Larmor e quello del laboratorio coincidono. In tal caso se D è la distanza focale definita da (3.9) si trova che $D = f$. Se $D > f$ si trova che i raggi dopo aver attraversato il solenoide convergono in un punto dell'asse z dopo la lente sottile. Infatti in questo caso la matrice F diventa

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Nel piano delle fasi a distanza D_1 dalla lente ossia in $s = D + D_1$ si ha

$$\begin{pmatrix} x(D+D_1) \\ x'(D+D_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & D_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} F \begin{pmatrix} Dx'_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D+D_1-DD_1/f \\ 1-D/f \end{pmatrix} x'_0 \quad (3.11)$$

Si ha un nuovo punto focale nel punto $s = D + D_1$ se in questo punto tutti i raggi convergono ossia se $x(D + D_1) = 0$ e di conseguenza anche $y(D + D_1) = 0$. Tale condizione si realizza se

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{D_1} - \frac{1}{f} = 0 \quad (3.12)$$

Quindi se $D > f$ allora il punto focale è a destra del solenoide e si ha

$$D_1 = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{D} \right)^{-1} \quad (3.13)$$

Focalizzazione con lente spessa

Consideriamo un sistema costituito da un fascio puntiforme che nasce in $s = 0$, si propaga in un drift di lunghezza D , quindi in un solenoide di lunghezza L e campo $B_z = B_0 f(s)$ con sharp edge. Successivamente il fascio si propaga nel vuoto. Vogliamo determinare la distaza D_1 dopo la fine del solenoide dove il fascio converge di nuovo, ripetendo le considerazioni fatte per la lente sottile. Il calcolo è solo leggermente più complicato per via della rotazione. Esiste un punto a distanza D_1 dal solenoide in cui il fascio converge se $G < 0$ poiche' in tal caso $x'(D + L + 0)$ ha segno opposto a x'_0 e lo stesso vale per y' . All'uscita del solenoide nel piano di fase (x_L, x'_L) per il sistema di Larmor vale la (3.6) e una identica relazione vale nel piano (y_L, y'_L) . Passiamo alle coordinate $x(D + L)$, $y(D + L)$ nel sistema fisso tramite la rotazione di un angolo $\alpha = \omega_0 L$.

$$\begin{pmatrix} x(D + L) \\ y(D + L) \end{pmatrix} = R(\alpha) \begin{pmatrix} x_L(D + L) \\ y_L(D + L) \end{pmatrix} = (D \cos \alpha + \omega_0^{-1} \sin \alpha) \begin{pmatrix} x'_0 \cos \alpha + y'_0 \sin \alpha \\ -x'_0 \sin \alpha + y'_0 \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Tramite la stessa rotazione passiamo dai momenti del sistema di Larmor ai momenti (x', y') nel sistema fisso

$$\begin{pmatrix} x'(D + L + 0) \\ y'(D + L - 0) \end{pmatrix} = R(\alpha) \begin{pmatrix} x'_L(D + L) \\ y'_L(D + L) \end{pmatrix} = (-\omega_0 D \sin \alpha + \cos \alpha) \begin{pmatrix} x'_0 \cos \alpha + y'_0 \sin \alpha \\ -x'_0 \sin \alpha + y'_0 \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Ad una distanza D_1 dopo il solenoide le coordinate nel piano di fase orizzontale (x, x') sono date da

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(D + L + D_1) \\ x'(D + L + D_1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & D_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \cos \alpha + \omega_0^{-1} \sin \alpha \\ -\omega_0 D \sin \alpha + \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_0 \cos \alpha + y'_0 \sin \alpha \\ -x'_0 \sin \alpha + y'_0 \cos \alpha \end{pmatrix} = \\ &= (x'_0 \cos \alpha + y'_0 \sin \alpha) \begin{pmatrix} D \cos \alpha + \omega_0^{-1} \sin \alpha - DD_1 \omega_0 \sin \alpha + D_1 \cos \alpha \\ -\omega_0 D \sin \alpha + \cos \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sempre ad una distanza D_1 dal solenoide le coordinate nel piano di fase verticale (y, y') del sistema fisso sono date da

$$\begin{pmatrix} y(D + L + D_1) \\ y'(D + L + D_1) \end{pmatrix} = (-x'_0 \sin \alpha + y'_0 \cos \alpha) \begin{pmatrix} D \cos \alpha + \omega_0^{-1} \sin \alpha - DD_1 \omega_0 \sin \alpha + D_1 \cos \alpha \\ -\omega_0 D \sin \alpha + \cos \alpha \end{pmatrix}$$

La condizione di focalizzazione $x(D + L + D_1) = y(D + L + D_1) = 0$ diventa

$$D \cos \alpha + \omega_0^{-1} \sin \alpha - DD_1 \omega_0 \sin \alpha + D_1 \cos \alpha = 0$$

da cui ricaviamo che il valore di D_1 ossia della distanza dal solenoide in cui le traiettorie convergono intersecando tutte l'asse z

$$D_{1 \text{ foc}} = -\frac{D \cos \alpha + \omega_0^{-1} \sin \alpha}{G} = \frac{D \cos \alpha + \omega_0^{-1} \sin \alpha}{D \omega_0 \sin \alpha - \cos \alpha} \quad (3.14)$$

Se abbiamo un fascio non monocromatico ma con uno spettro continuo di energia tramite le precedenti relazioni possiamo determinare quali particelle passano attraverso un collimatore di raggio D_1 posto nel fuoco. La (3.14) definisce il fuoco per una energia fissata E_0 ma, dato un fascio non monocromatico, attraverso un collimatore di raggio r passano anche particelle con energia prossima ad E_0 . Per determinare il potere di selezione in energia di un collimatore introduciamo la variabile A

$$A = D \cos \alpha + \omega_0^{-1} \sin \alpha - DD_1 \omega_0 \sin \alpha + D_1 \cos \alpha \quad (3.15)$$

Se $E \neq E_0$ risulta che $A \neq 0$ e le coordinate in $s = D + L + D_1$ di una particella sono date da

$$x(D + L + D_1) = A(x'_0 \cos \alpha + y'_0 \sin \alpha) \quad y(D + L + D_1) = A(-x'_0 \sin \alpha + y'_0 \cos \alpha)$$

La distanza dall'asse z è data

$$(x^2(D + L + D_1) + y^2(D + L + D_1))^{1/2} = A(x'^2_0 + y'^2_0)^{1/2}$$

Pertanto attraverso un collimatore di raggio r passano solo le particelle con

$$A \leq \frac{r}{(x'^2_0 + y'^2_0)^{1/2}}$$

Capitolo 4

Analisi quantitativa di focalizzazione e trasporto

Consideriamo un solenoide di lunghezza L collocato ad una distanza D dall'origine il cui campo magnetico vale B_0 in $D < s < D + L$ ed è nullo altrove (approssimazione di sharp-edge). Consideriamo un fascio puntiforme di particelle di energia E che parte dall'origine $s = 0$. La divergenza angolare di una particella del fascio è espressa da x'_0, y'_0 . In approssimazione parassiale $x'_0 = \tan \theta_0 x \simeq \theta_0 x$ dove θ_0 è l'angolo che la traiettoria forma con l'asse x e analogamente per y'_0 . All'uscita dal solenoide la divergenza è data da x'_1, y'_1 dove

$$x'_1 = G x'_0 \quad y'_1 = G y'_0$$

dove G è dato da (3.8). Si noti che se $G > 0$ la traiettoria della particella che esce dal solenoide è divergente, se $G < 0$ è convergente mentre se $G = 0$ risulta parallela all'asse z . Se invertiamo il verso di percorrenza l'origine diventa il fuoco per un fascio parallelo proveniente da $s = +\infty$ che si muove verso l'origine. Il valore di D per cui risulta $G = 0$ è dato da (3.9) e lo indichiamo con $D_f = L/(\alpha \tan(\alpha))$. Notiamo che se la distanza del solenoide dall'origine è maggiore di D_f il fascio emergente dal solenoide è convergente, se la distanza è minore di D_f risulta divergente, infatti

$$D > D_f \quad \longrightarrow \quad G < 0 \quad D < D_f \quad \longrightarrow \quad G > 0$$

Per valutare l'effetto della cromaticità consideriamo che il rapporto $L/D_f = \alpha \tan(\alpha)$ dipende solo da α che vale

$$\alpha = \frac{eB_0}{mc^2} \frac{L}{2\beta_0} = 0.0016 L(cm) \frac{B_0(\text{Tesla})}{\beta_0}$$

Il potere focalizzante misurato dal rapporto L/D_f dipende solo dal rapporto B_0/β_0 . Si noti che L/D_f è una funzione monotona di α per $0 \leq \alpha < \pi/2$, e quindi cresce all'aumentare del campo magnetico e decresce all'aumentare dell'energia. Consideriamo ora un sistema costituito da un tratto dritto (drift) di lunghezza D tra la sorgente e il solenoide, il solenoide di lunghezza L ed un tratto dritto di lunghezza D_1 dopo il solenoide. Se $G < 0$ ad una opportuna distanza D_1 le traiettorie di tutte le particelle hanno $x = y = 0$ e quindi la sorgente puniforme che era in $z = 0$ viene trasportata in $z = D + L + D_1$. Notiamo che fissato B_0 il valore di D_1 dipende dalla energia delle particelle del fascio. Abbiamo visto che se $G < 0$ il fascio viene focalizzato dopo aver attraversato il solenoide e la distanza D_1 dal solenoide del punto di focalizzazione, che si trova quindi in $s = D + L + D_1$, è data da (3.14) Si vede quindi che $D_1 > 0$ se $G < 0$. Questa proprietà può essere usata per la selezione in energia. Se abbiamo un fascio non monocromatico, ad esempio con spettro esponenziale come accade ai fasci di protoni accelerati tramite interazione di un laser con un bersaglio solido di spessore micrometrico per selezionare una energia E_0 si pone un collimatore ad una distanza $D_1 = D(E_0)$. In questo modo le particelle con energia $E > E_0$

convergono in $D_1(E) > D_1(E_0)$ mentre quelle con $E < E_0$ convergono in $D_1(E) < D_1(E_0)$ e quindi vengono fermate dal collimatore.

Selezione in energia

Diamo come esempio una linea con un primo drift lungo $D = 1$ cm, seguito da un solenoide lungo $L = 30$ cm con campo $B_0 = 10$ T per un fascio di protoni aventi $E = 30$ MeV di energia. Nella figura confrontiamo le traiettorie ottenute per integrazione numerica delle eqazioni complete (1.1) senza approssimazione parassiale, per un parametro di frige field $\eta = 0.1$ cm che in pratica corrisponde ad uno sharp-edge, con la soluzione analitica ottenuta tramite la mappa di trasferimento. Siccome calcoliamo la mappa di trasferimento tra $s = D$ e $s = L$ la traiettoria disegnata è una retta. Se usiamo la soluzione analitica anche all'interno del solenoide la differenza con la soluzione numerica è al di sotto della risoluzione grafica. In questo caso si trova $D_1 = 38.77$ cm. Nella stessa figura a destra confrontiamo la soluzione numerica per lo stesso solenoide con frige field avente $\eta = 2$ cm con la soluzione analitica per il solenoide con sharp edge. In questo caso la differenza è significativa perché la distanza del fuoco dal solenoide passa da 39 cm a 61 cm.

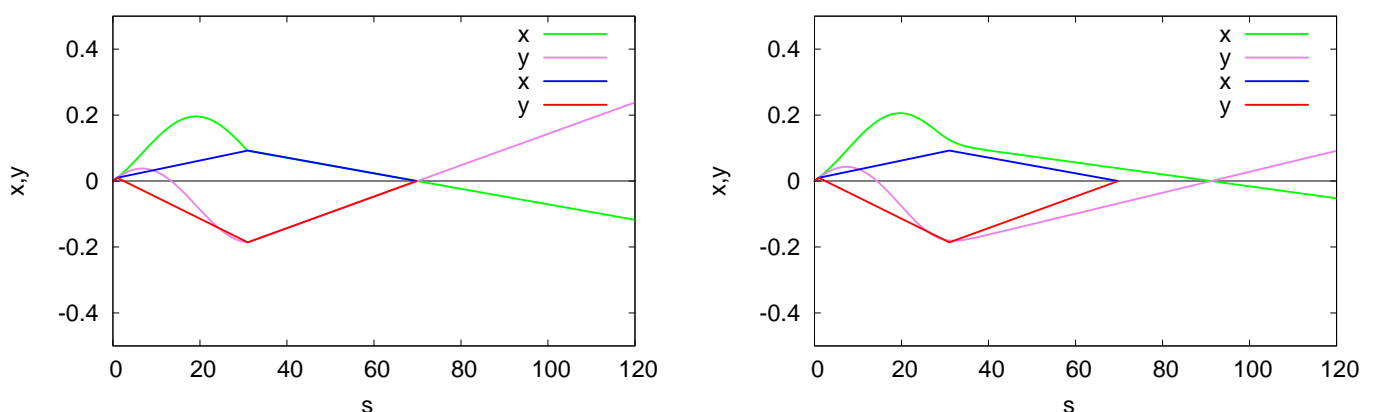


Figura 2 Focalizzazione per una linea formata da un drift di $D=1$ cm e un solenoide con $L=30$ cm e $B_0=10$ Tesla. La figura di destra mostra il confronto tra soluzione numerica e mappa esatta nel caso di sharp edge per particelle con energia di 30 MeV. La focalizzazione è a $D_1=39$ cm dopo il solenoide. La figura di destra mostra lo stesso confronto ma dove la soluzione numerica è calcolata per un solenoide con un fringe field di $\eta=2$ cm. In questo caso il punto di focalizzazione dista $D_1=61$ cm e quindi l'effetto del sharp edge è assai significativo. Questo dispositivo con un collimatore a circa 92 cm dalla sorgente costituisce un efficace metodo per la selezione in energia tanto più efficace quanto più il raggio del foro del collimatore è piccolo. Tipicamente $r=1$ mm risulta essere una buona scelta.

Linea di trasferimento LEBT

Negli acceleratori di alta intensità un elemento critico è la linea di trasferimento a bassa energia LEBT, che porta il fascio di protoni generato dalla sorgente fino alla prima cavità accelerante a radiofrequenza RFQ. Questa linea semplicemente sposta il fascio puntiforme

fino all'ingresso della RFQ ed è anche disegnata per consentire una parziale neutralizzazione del fascio riducendo gli effetti di repulsione Coulombiana che tendono ad allargare e defocalizzare il fascio stesso. La energia dei protoni è bassa tipicamente dell'ordine del centinaio di KeV e quindi gli effetti di carica spaziale sono importanti.

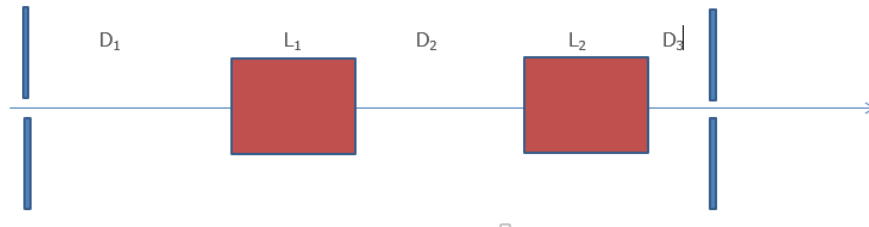


Figura 3 Struttura del Lebt per ESS. I parametri di progetto sono $D_1=60$ cm $L_1=30$ cm, $D_2=60$ cm, $L_2=25$ cm, e la distanza del secondo solenoide dal punto in cui fascio viene focalizzato è $D_3=30$ cm. I campi dei due solenoidi sono $B_1=-0.2$ Tesla, $B_2=-0.28$ Tesla ed i parametri di fringe field $\eta_1=3$ cm, $\eta_2=5$ cm.

La linea di trasferimento è basata su lenti magnetiche solenoidali, che rispetto alle lenti quadrupolari risultano più efficienti in quanto catturano una maggiore quantità di fascio e focalizzano simultaneamente lungo le due direzioni ortogonali x, y nel piano trasverso. Un quadrupolo focalizza lungo x e defocalizza lungo y e quindi vanno sempre usate in coppie, tripletti o quadrupletti per avere un risultato complessivo focalizzante. Nella linea di trasporto per il LEBT di ESS sono previsti due solenoidi come mostra la figura 3. Nella figura 4 mostriamo l'andamento dei campi magnetici e della loro derivata prima rispetto ad s .

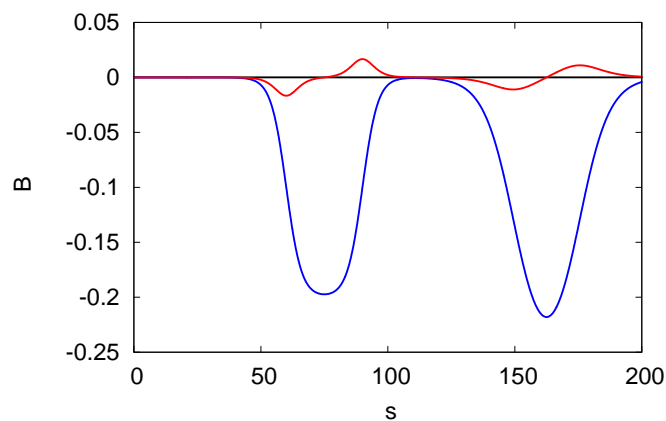


Figura 4 Andamento del campo magnetico complessivo $B_z(s)$ dei due solenoidi, linea blue, lungo la linea di trasferimento i cui parametri sono specificati nella figura 3, e della derivata prima dB_z/ds , linea rossa.

Come mostra la figura 5, questa linea consente, a distanza $D_f = D_1 + L_1 + D_2 + L_2 + D_3$ di circa 2 metri, di riprodurre un fascio puntiforme quasi identico a quello che ha nella origine.

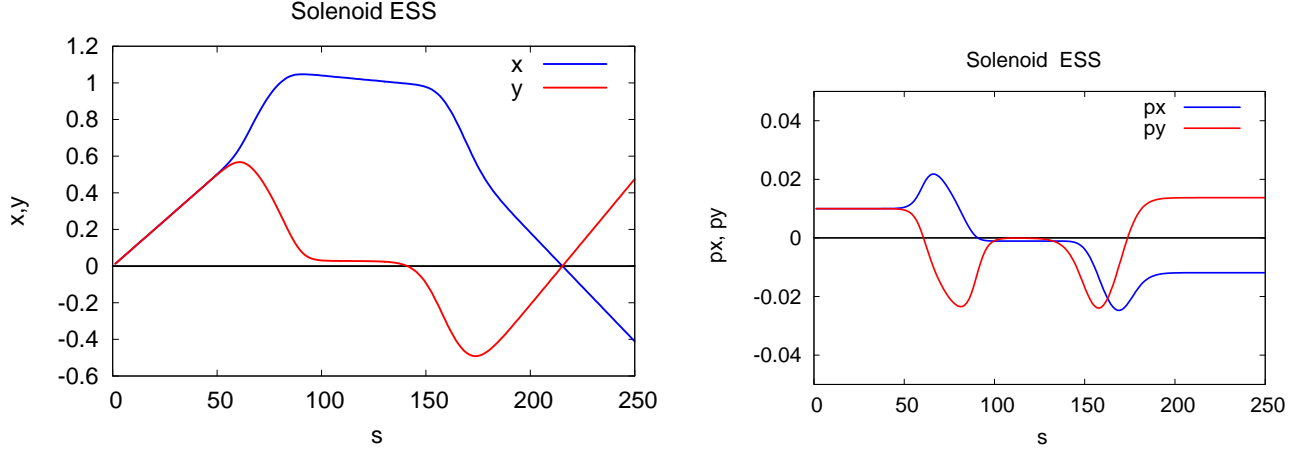


Figura 5 Andamento della traiettoria, componenti x,y per una particella che ha come condizioni iniziali $x(0)=y(0)=0$, $x'(0)=y'(0)=0.01$. Nella figura di sinistra si mostra in blu la coordinata x e in rosso la coordinata y . Nella figura di destra si mostrano i momenti $p_x=x'$ in blu e $p_y=y'$ che danno la inclinazione della traiettoria espressa in radianti.

Infatti qualunque sia l'inclinazione della traiettoria di un protone che parte dal primo collimatore $s = 0$, dove ha $x = y = 0$, nel punto $s = D_f$ le sue coordinate trasverse sono ancora nulle. Nella figura 5 si vede che dove il campo è nullo la traiettoria è rettilinea. L'inclinazione della traiettoria ha un andamento morbido dovuto al fringe field.

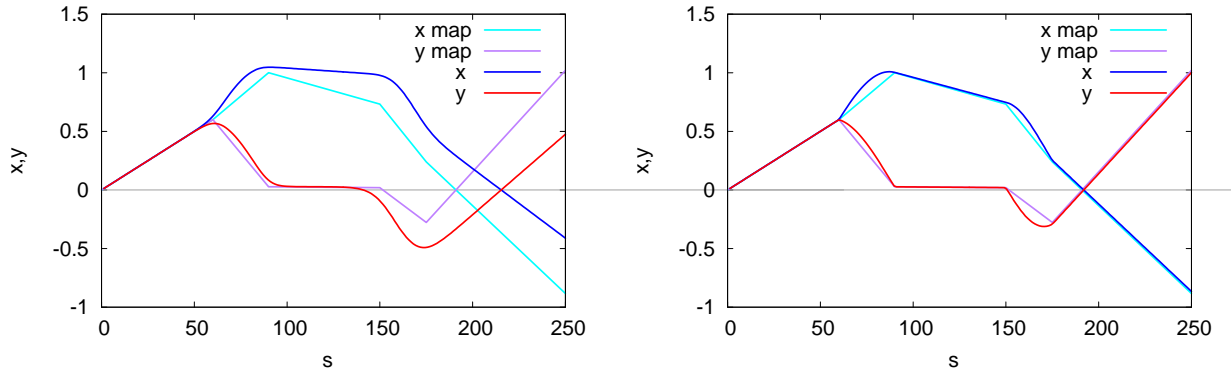


Figura 6 Lato destro: confronto tra le coordinate x,y per una particella che ha come condizioni iniziali $x(0)=y(0)=0$, $x'(0)=y'(0)=0.01$ ottenute integrando le equazioni del moto, linea blu per x , rossa per y e la soluzione analitica tramite la mappa di trasferimento. La coordinata x per la soluzione analitica è in celeste, la coordinata y in lilla. Lato sinistro: confronto tra la soluzione delle equazioni del moto complete, ma per un campo nel limite di sharp edge, e la soluzione analitica tramite mappa di trasferimento. Si noti che la soluzione analitica è rettilinea perché calcolata tramite mappa di trasferimento e quindi si hanno le coordinate solo all'inizio ed alla fine del solenoide.

Nella stessa figura si mostra anche l'andamento di $p_x \equiv x'$ e di $p_y \equiv y'$ il cui valore massimo è di circa 20 mrad, per un valore di ingresso di 10 mrad. Il valore in uscita è di circa 15 mrad e quindi la divergenza del fascio puntiforme dopo il trasporto non ha una crescita importante. Le traiettorie mostrate in figura sono state ottenute integrando numericamente le equazioni del moto complete senza approssimazione parassiale.

Nella figura 6 si mostra il confronto tra la soluzione numerica delle equazioni del moto per un solenoide con fringe field e la soluzione analitica ottenuta in approssimazione parassiale e con un campo magnetico nel limite di sharp edge. La discrepanza tra soluzione analitica e numerica osservabile nella figura di sinistra è dovuta alla differenza di comportamento delle traiettorie quando il campo ha il fringe field di progetto oppure lo sharp edge.

La figura di destra mostra il confronto tra la soluzione numerica, che viene calcolata per un valore di η dell'ordine del mm che in pratica corrisponde al limite di sharp edge, e la soluzione analitica ottenuta tramite la mappa di trasferimento. L'accordo tra le due soluzioni è ottimo, e questo conferma la accuratezza della approssimazione parassiale. Nella figura 7 mostriamo l'andamento delle coordinate x e y per un fascio di traiettorie. Si vede che il fascio puntiforme viene trasportato dalla linea in un altro fascio puntiforme con una divergenza solo debolmente accresciuta.

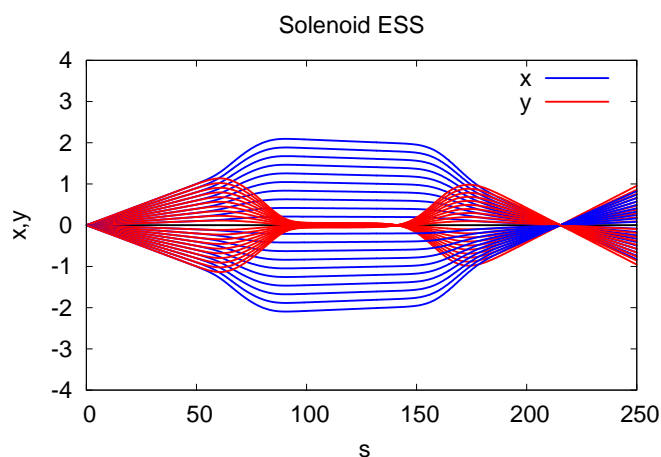


Figura 7 Trasporto di un fascio di particelle lungo la linea. La figura mostra le coordinate x in blu e y in rosso. Le traiettorie sono ottenute integrando numericamente le equazioni del moto esatte. Nella approssimazione sharp edge il fascio ottenuto in questo modo coincide perfettamente con quello ottenuto analiticamente tramite la mappa di trasferimento.

Capitolo 5

Formulazione Hamiltoniana e carica spaziale

Consideriamo le equazioni del moto per il solenoide nel caso generale di un fringe field qualsiasi, che riscriviamo nella forma

$$\begin{cases} x'' = 2\omega_0 f(s) y' + \omega_0 f'(s) y \\ y'' = -2\omega_0 f(s) x' - \omega_0 f'(s) x \end{cases}$$

Queste equazioni corrispondono alla lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{x'^2 + y'^2}{2} + \omega_0 f(s)(xy' - yx')$$

come si verifica immediatamente poiché i momenti coniugati sono dati da

$$p_x = x' - \omega_0 f(s) y \quad p_y = y' + \omega_0 f(s) x$$

La Hamiltoniana risulta espressa da

$$H = x'p_x + y'p_y - \mathcal{L} = \frac{x'^2 + y'^2}{2} = \frac{1}{2}(p_x + \omega_0 f(s)y)^2 + \frac{1}{2}(p_y - \omega_0 f(s)x)^2$$

Le equazioni del moto di Hamilton diventano

$$x' = p_x + \omega_0 f(s) y \quad y' = p_y - \omega_0 f(s) x$$

$$p'_x = -\omega_0^2 x + \omega_0 p_y \quad p'_y = -\omega_0^2 f(s) y - \omega_0 f(s) p_x$$

La hamiltoniana si può riscrivere nella forma seguente

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + \omega_0^2 f^2(s) \frac{x^2 + y^2}{2} - \omega_0 f(s) (x p_y - y p_x) \quad (5.1)$$

Questa è esattamente l'hamiltoniana di un oscillatore armonico isotropo di frequenza $\omega_0 f(s)$ dipendente da s scritto in un sistema di riferimento che ruota esattamente con la stessa frequenza. Se ci mettiamo nel riferimento fisso (mediante la rotazione inversa) l'hamiltoniano è quello di un oscillatore. Nel caso del solenoide il sistema di Larmor corrisponde al sistema fisso per un oscillatore. Il sistema del laboratorio per il solenoide corrisponde al sistema rotante per l'oscillatore. La trasformazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \left(\omega_0 \int_0^s f(s) ds \right) \begin{pmatrix} x_L \\ y_L \end{pmatrix}$$

che porta alle equazioni del moto

$$x_L'' = -\omega_0^2 f^2(s) x_L \quad y_L'' = -\omega_0^2 f^2(s) y_L$$

La lagrangiana e la hamiltoniana diventano

$$L_L = \frac{x_L'^2 + y_L'^2}{2} - \omega_0^2 f^2(s) \frac{x_L^2 + y_L^2}{2} \quad H_L = \frac{p_{xL}^2 + p_{yL}^2}{2} + \omega_0^2 f^2(s) \frac{x_L^2 + y_L^2}{2}$$

Carica spaziale

Valutiamo in questo sistema l'effetto della carica spaziale ossia l'effetto della repulsione Coulombiana tra i protoni del fascio. Assumiamo per ora che i protoni siano distribuiti in un cilindro di raggio R e che la distribuzione di carica sia uniforme. Data la simmetria radiale il potenziale è lo stesso nei due riferimenti. Come vedremo tra poco il potenziale all'interno del cilindro è dato da

$$V(x_L, y_L) = V(x, y) = -\frac{\xi}{R^2(s)}(x^2 + y^2)$$

dove

$$\xi = \frac{eQ}{mc^2 \beta_0^2}$$

misura la intensità della carica. Con Q si indica la carica per unità di lunghezza che è costante e con $v_0 = c\beta_0$ è la velocità longitudinale. Quindi nel sistema di Larmor l'Hamiltoniano diventa

$$H_L = \frac{p_{xL}^2 + p_{yL}^2}{2} - \omega^2(s) \frac{x_L^2 + y_L^2}{2}$$

dove

$$\omega^2(s) = \omega_0^2 f^2(s) - \frac{\xi}{R^2(s)}$$

Abbiamo un oscillatore con frequenza variabile $\omega(s)$. All'interno del solenoide la frequenza passa dal valore ω_0 ad un valore più piccolo ω dato da

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\xi}{R^2}$$

Il rapporto ω/ω_0 fornisce una misura della intensità della carica spaziale. Al diminuire del rapporto tra 1 e 0 il potere di focalizzazione del solenoide diminuisce. Nel sistema fisso dato che il potenziale di carica spaziale è centrale e quindi invariante per rotazione l'hamiltoniano diventa

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + \omega(s) \frac{x^2 + y^2}{2} - \omega_0 f(s) (x p_y - y p_x)$$

Nel trattare la carica spaziale va determinato il raggio R del fascio e questo si ottiene attraverso la soluzione della equazione di Vlasov.

Soluzione autoconsistente

Vogliamo ora determinare il raggio $R(s)$ in modo autoconsistente. Per farlo ci mettiamo nel sistema di Larmor omettendo di scrivere per brevità l'indice L nelle coordinate e momenti. La densità di particelle nello spazio delle fasi $f(x, y, p_x, p_y, s)$ soddisfa l'equazione di Liouville.

$$\frac{\partial f}{\partial s} + [f, H] = 0 \quad (5.2)$$

Se vogliamo che il campo elettrico sia quello generato dalle particelle in moto dobbiamo imporre che la distribuzione spaziale di carica sia tale che la equazione di Poisson per potenziale V di carica spaziale risulti soddisfatta per la corrispondente densità di carica.

$$\Delta V(x, y) = -4\pi \rho(x, y)$$

La funzione f integrata su p_x, p_y fornisce la distribuzione normalizzata $f(x, y, s)$

$$f(x, y, s) = \int_{\mathbb{R}^2} dp_x dp_y, f(x, y, p_x, p_y, s) \quad \int \int_{\mathbb{R}^2} dx dy f(x, y, s) = 1$$

e la densità di carica è data da

$$\rho(x, y, s) = Q f(x, y, s) \quad (5.3)$$

Infatti si considera il dominio $s < z < s + ds$ la carica in essa contenuta è $dq = Q ds$ data la normalizzazione scelta per $f(x, y, s)$ e quindi $dq/ds = Q$ è la densità lineare di carica.

Se il solenoide è infinito e quindi $f(s) = 1$ ovunque e H non dipende più da s . Se il solenoide è finito di lunghezza L e siamo nel limite di sharp edge allora ci limitiamo all'intervallo $0 < s < L$ dove $f = 1$. L'hamiltoniano è quindi

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + \omega^2 \frac{x^2 + y^2}{2}$$

Ogni distribuzione stazionaria $f = f(H)$ soddisfa la equazione di Liouville $[f(H), H] = 0$. Scegliamo la cosiddetta distribuzione KV (Kapchisnky-Vladimirsky) data da $f(H) = C\delta(E - H)$ ossia

$$f = C\delta\left(E - \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} - \omega^2 \frac{x^2 + y^2}{2}\right) \quad (5.4)$$

Poniamo $E = \omega^2 R^2/2$ e $C = (2\pi^2 R^2)^{-1}$ calcoliamo la distribuzione spaziale corrispondente $f(x, y)$ Usando coordinate polari per i momenti $p_x = p \cos \phi$, $p_y = p \sin \phi$ e ponendo $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ si ottiene

$$f(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} dp_x dp_y f = C \int_0^{2\pi} d\phi_p \int_0^\infty d\left(\frac{p^2}{2}\right) \delta\left(\frac{\omega^2}{2}(R^2 - r^2) - \frac{p^2}{2}\right) = \frac{1}{\pi R^2} \vartheta(R - r) \quad (5.5)$$

Quindi la densità è costante in un cilindro di raggio R .

Equazione di Poisson

Consideriamo un insieme di cariche che si muovono in un cilindro di raggio R con velocità uniforme v_0 nella direzione z . Dato un cilindro di altezza ℓ se ρ è la densità di carica la carica q in esso contenuta e la carica Q per unità di lunghezza sono date da

$$q = \rho \ell \pi R^2 \quad Q = \frac{q}{\ell} = \rho \pi R^2$$

La intensità di corrente è data dalla carica q che attraversa la base del cilindro in un tempo $t = \ell/v_0$ e quindi

$$I = \frac{q}{t} = \frac{qv_0}{\ell} = Qv_0$$

Quindi la carica per unità di lunghezza si esprime come

$$Q = \rho \pi R^2 = \frac{I}{v_0}$$

Se la carica ha densità uniforme possiamo ricavare il valore del campo elettrico radiale dalla legge di Poisson $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho$. Siccome il campo elettrico è radiale $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{e}_r$ e dal teorema della divergenza applicato ad un cilindro di altezze ℓ e raggio r si ricava che il flusso di \mathbf{E} è dato da $2\pi\ell r E$ mentre la carica contenuta nel cilindro vale $\pi r^2 \ell \rho$ se $r < R$ mentre vale $\pi R^2 \ell \rho$ se $r > R$. Ne segue che la forza che si esercita su una carica è data da

$$F(r) = eE(r) = 2eQ \begin{cases} r/R^2 & \text{se } r < R \\ 1/r & \text{se } r > R \end{cases}$$

Passando da t ad s si trova che il potenziale con cui questo campo contribuisce alla hamiltoniana H dentro il solenoide è dato da $V(r) = -(mv_0^2)^{-1} \int F(r)dr$ ossia

$$V(r) = -\frac{r^2}{2} \frac{\xi}{R^2} \quad r \leq R \quad \xi = \frac{2eQ}{mv_0^2} \quad (5.6)$$

Il parametro ξ che misura la intensità di carica spaziale è noto come perveance.

Determinazione del raggio del fascio

All'interno del solenoide per un solenoide con sharp edge l'Hamiltoniano nel sistema di Larmor è quello di un oscillatore con frequenza ω definita da

$$\omega = \omega_0^2 - \frac{\xi}{R^2} \quad (5.7)$$

Per calcolare R notiamo che le soluzioni sono oscillazioni armoniche in x, y con ampiezze $A_x A_y$

$$\begin{aligned} x &= A_x \cos(\omega t + \alpha_x) & p_x &= -A_x \omega \sin(\omega t + \alpha_x) \\ y &= A_y \cos(\omega t + \alpha_1) & p_y &= -A_y \omega \sin(\omega t + \alpha_y) \end{aligned}$$

Ne segue che le azioni J_x, J_y e le emittanze ϵ_x, ϵ_y sono conservate. Abbiamo quindi

$$\epsilon_x = 2J_x = \omega A_x^2 \qquad \epsilon_y = 2J_y = \omega A_y^2$$

Inoltre si ha che

$$x^2 + y^2 \leq A_x^2 + A_y^2 = R^2$$

Definiamo l'emittanza totale

$$\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y \qquad \epsilon = \omega A_x^2 + A_y^2 = \omega R^2$$

La equazione che definisce R si trova usando (5.7) e (5.8)

$$\frac{\epsilon^2}{R^4} = \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\xi}{R^2}$$

che possiamo riscrivere nella forma

$$R^4 \omega_0^2 - \xi R^2 - \epsilon^2 = 0 \tag{5.8}$$

Indichiamo con R_0 il più piccolo valore possibile di R che si ottiene per emittanza nulla $\epsilon = 0$

$$R \geq R_0 = \frac{\omega_0}{\xi^{1/2}}$$

Mappa con carica spaziale

Poichè il potenziale repulsivo dovuto alla carica spaziale è radiale e quindi invariante per rotazione, passando dal sistema a quello del laboratorio, il suo contributo all'Hamiltoniano non cambia. Quindi l'hamiltoniano con il contributo di carica spaziale in $0 < s < L$, nella approssimazione di sharp edge per il solenoide è dato da

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - \omega_0(x p_y - y p_x)$$

dove ω^2 è definito da (5.7) con R soluzione di (5.8). Abbiamo quindi una situazione simile a quella in assenza di carica spaziale. L'unica differenza è che ora la frequenza dell'oscillatore armonico ω differisce dalla frequenza di rotazione ω_0 . L'Hamiltoniano è quello di un oscillatore con frequenza ω in un sistema rotante con frequenza ω_0 . Procedendo come per arrivare alla formula 2.6 e definendo

$$C_0 = \cos(\omega_0 L) \quad S_0 = \sin(\omega_0 L) \qquad C = \cos(\omega L) \quad S = \sin(\omega L)$$

la mappa di trasferimento risulta essere espressa da

$$\begin{pmatrix} x(L) \\ x'(L+0) \\ y(L) \\ y'(L+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_0 & 0 & S_0 & 0 \\ 0 & C_0 & 0 & S_0 \\ -S_0 & 0 & C_0 & 0 \\ 0 & -S_0 & 0 & C_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & \omega^{-1}S & 0 & 0 \\ \omega S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & \omega^{-1}S \\ 0 & 0 & -\omega S & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0-0) \\ y(0) \\ y'(0-0) \end{pmatrix}$$

Effettuando il prodotto di matrici il risultato finale assume la forma

$$\begin{pmatrix} x(L) \\ x'(L+0) \\ y(L) \\ y'(L+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_0 C & \omega^{-1} C_0 S & S_0 C & \omega^{-1} S S_0 \\ -\omega C_0 S & C_0 C & -\omega S_0 S & S_0 C \\ -S_0 C & -\omega^{-1} S_0 S & C_0 C & \omega^{-1} C_0 S \\ \omega S_0 S & -S_0 C & -\omega C_0 S & C_0 C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0-0) \\ y(0) \\ y'(0-0) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Consideriamo i parametri di ESS e calcoliamo la perveance. I parametri sono $N/\ell = 10^9$ protoni per centimetro, $E = 75$ KeV dimensione del bunch $r_x = r_y = 1$ mm e divergenza $p_x = p_y = 16$ mrad, emittanza $\epsilon = 16$ mm-mrad. Per la perveance troviamo il seguente valore

$$\xi = 2 \frac{eQ}{mv^2} = 2e^2 \frac{N}{\ell} \frac{1}{m_p c^2} \frac{1}{\beta^2} = 2r_c \frac{N}{\ell} \frac{m_e}{m_p} \frac{1}{\beta^2} \quad r_c = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.810^{-13} \text{ cm}$$

dove r_c è il raggio classico dell'elettrone. Inserendo i valori per ESS tra cui $\beta_0 = 0.013$ si trova che

$$\xi = 0.9 \cdot 10^{-3}$$

Il valore di R dentro il solenoide è dato dalla soluzione di

$$\omega_0^2 R^4 - \xi R^2 - \epsilon^2 = 0$$

Dove $\omega_0 = 0.025$ che corrisponde ad un solenoide che ha $B = 0.2$ Tesla

$$R^2 = \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + 4\epsilon^2 \omega_0^2}}{2\omega_0^2}$$

Quindi il minimo valore che si ha per $\epsilon = 0$ è $R = 1.2$ cm. Confrontiamo per i parametri di ESS l'effetto di ridotta focalizzazione prodotta dalla carica spaziale considerando un numero di protoni per cm pari a $N = 10^7$ e $N = 210^7$ valori tipici che si ottengono in seguito alla neutralizzazione. La figura 8 mostra come cambia il punto di focalizzazione rispetto al caso in cui la carica spaziale è assente.

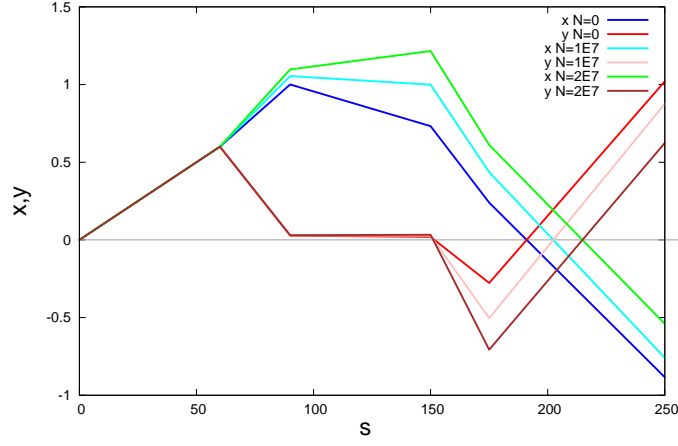


Figura 8 Traiettorie per le componenti x e y nella linea di trasporto per ESS in cui la frequenza di focalizzazione è ridotta dalla carica spaziale che corrisponde ad una carica di $N=10^7$, 2×10^7 protoni per cm. I solenoidi sono considerati nel limite di sharp edge. Le linee blu e rossa corrispondono alle coordinate x e y rispettivamente in assenza di carica spaziale. Le linee celeste e rosa alle coordinate x e y per una carica di $N=10^7$ protoni per cm. Le linee verde e marrone alle coordinate x e y per una carica di $N=2 \times 10^7$ protoni per cm.

Conclusioni

Il lavoro qui presentato ha riguardato la propagazione di un fascio di particelle lungo una linea di trasporto a bassa energia LEBT. Questa linea è presente negli acceleratori lineari ad alta intensità progettati per accelerare fasci di protoni o ioni leggeri utilizzati per produrre sorgenti intense di neutroni tramite il processo di spallazione. Due progetti sono in fase avanzata di progettazione in Europa IFMIF e ESS. Il primo prevede la realizzazione di un linac per produrre fasci intensi di protoni a 2.5 GeV con i quali viene generato un fascio di neutroni di spallazione da utilizzarsi per l'analisi della struttura dei materiali tramite diffrazione. Il secondo prevede la realizzazione di due linac che accelerano fasci di deutoni fino a 40 MeV i quali producono, per interazione con bersagli di litio, neutroni con energia prossima a quella dei neutroni prodotti dalla fusione deuterio trizio in un Tokamak. Questi fasci saranno utilizzati per valutare il danneggiamento da radiazioni prodotto sui materiali che costituiscono il toroide di ITER. Il modulo LEBT è uno di quelli più critici in un linac ad alta intensità a causa della difficoltà del trasporto di un fascio intenso di bassa energia. Nel presente lavoro è stata studiata l'ottica del trasporto in una linea con due solenoidi, rivisitando la teoria della propagazione di un fascio in un singolo solenoide ed applicandola al LEBT di ESS. Sono state confrontate la soluzione numerica per la linea con la soluzione analitica ottenuta in approssimazione parassiale. Infine si è indicato come la carica spaziale riduca il potere focalizzante di un solenoide. Questo è solo il primo passo per tenere conto degli effetti di carica spaziale. Infatti questi vanno trattati prima in modo autoconsistente con l'equazione di Poisson-Vlasov per la linea considerando la riduzione della carica spaziale dovuta alla neutralizzazione. La soluzione finale del problema prevede la trattazione dinamica del processo di neutralizzazione risolvendo le equazioni di Maxwell-Vlasov per il plasma, ossia tenendo conto della ionizzazione, eventualmente della ricombinazione, e di tutti gli effetti di natura elettromagnetica. Questo è un progetto a lungo termine che potrebbe essere affrontato in un futuro lavoro.

Appendice

Osserviamo che $\omega(s)$ è discontinua mentre $\omega'(s)$ è una somma di due funzioni δ . Quindi $Z_L(s)$ e $Z'_L(s)$ sono funzioni continue. Invece nel sistema fisso si trova che le coordinate x, y sono continue poiché tale è $Z(s)$. Invece x', y' sono discontinue poiché questo accade per $Z'(s)$ in quanto $Z''(s)$ ha il contributo di due funzioni. Il salto di $Z'(s)$ nei punti $s = 0$ e $s = L$ si calcola tramite la (2.1) oppure la successiva equazione del moto. Il salto di $Z'(s)$ è determinato dal salto di $\Phi'(s) = \omega(s)$

Nel punto $s = 0$ il salto di Z' è dato da $i\omega_0 Z_L(0) = i\omega_0 Z(0)$. Scriviamo quindi

$$Z(0) = Z_L(0) \quad Z'(0-0) = Z'_L(0) \quad Z'(0+0) = Z'_L(0) + i\omega_0 Z_L(0)$$

Con $Z'(s \pm 0)$ indichiamo il limite a sinistra ed a destra della funzione $Z'(s)$ nei punti in cui è discontinua

$$Z'(s \pm 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z'(s \pm \epsilon)$$

Esprese in coordinate reali queste relazioni diventano

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_L(0) \\ y_L(0) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x'(0-0) \\ y'(0-0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_L(0) \\ y'_L(0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'(0+0) \\ y'(0+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_L(0) + \omega_0 y(0) \\ y'_L(0) - \omega_0 x(0) \end{pmatrix}$$

Il salto in $s = 0$ di x' e y' è dato da

$$x'(0+0) = x'(0-0) + \omega_0 y(0) \quad y'(0+0) = y'(0-0) - \omega_0 x(0)$$

Analogamente in $s = L$ detto $\alpha = \omega_0 L$ il salto di $Z(s)$ è dato da $-i\omega_0 e^{i\alpha} Z_L(L)$. Scriviamo quindi

$$Z(L) = e^{i\alpha} Z_L(L) \quad Z'(L-0) = Z'_L(L)e^{i\alpha} + i\omega_0 Z_L(L)e^{i\alpha} \quad Z'(L+0) = Z'_L(L)e^{i\alpha}$$

In coordinate reali introducendo la matrice di rotazione

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

la espressione è data da

$$\begin{pmatrix} x(L) \\ y(L) \end{pmatrix} = R(\alpha) \begin{pmatrix} x_L(L) \\ y_L(L) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x'(L+0) \\ y'(L+0) \end{pmatrix} = R(\alpha) \begin{pmatrix} x'_L(L) \\ y'_L(L) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'(L-0) \\ y'(L-0) \end{pmatrix} = R(\alpha) \begin{pmatrix} x'_L(L) \\ y'_L(L) \end{pmatrix} + \omega_0 R(\alpha) \begin{pmatrix} y_L(L) \\ -x_L(L) \end{pmatrix}$$

La soluzione per $0 < s < L$ è data da $Z_L(s) = \cos(\omega_0 s) Z_L(0) + \omega_0^{-1} \sin(\omega_0 s) Z'_L(0)$ da cui segue

$$\begin{pmatrix} Z_L(s) \\ Z'_L(s) \end{pmatrix} = F(s) \begin{pmatrix} Z_L(0) \\ Z'_L(0) \end{pmatrix} \quad F(s) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 s) & \omega_0^{-1} \sin(\omega_0 s) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 s) & \cos(\omega_0 s) \end{pmatrix}$$

Riportata a coordinate reali si ha quindi

$$\begin{pmatrix} x_L(s) \\ x'_L(s) \end{pmatrix} = F(s) \begin{pmatrix} x_L(0) \\ x'_L(0) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y_L(s) \\ y'_L(s) \end{pmatrix} = F(s) \begin{pmatrix} y_L(0) \\ y'_L(0) \end{pmatrix}$$

Mappa di trasferimento

Costruiamo quindi la mappa nello spazio delle fasi (x, x', y, y') dal punto iniziale $s = 0 - 0$ al punto finale $s = L + 0$ tenendo conto che all'entrata nel solenoide la relazione tra le coordinate nei due riferimenti è data da

$$\begin{pmatrix} x_L(0) \\ y_L(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x'_L(0) \\ y'_L(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(0-0) \\ y'(0-0) \end{pmatrix}$$

mentre all'uscita dal solenoide si ha

$$\begin{pmatrix} x(L) \\ y(L) \end{pmatrix} = R(\omega_0 L) \begin{pmatrix} x_L(L) \\ y_L(L) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x'(L+0) \\ y'(L+0) \end{pmatrix} = R(\omega_0 L) \begin{pmatrix} x'_L(L) \\ y'_L(L) \end{pmatrix}$$

Nello spazio delle fasi la mappa di trasferimento all'interno del solenoide è data da

$$\begin{pmatrix} x_L(L) \\ x'_L(L) \\ y_L(L) \\ y'_L(L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_L(0) \\ x'_L(0) \\ y_L(0) \\ y'_L(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0-0) \\ y(0) \\ y'(0-0) \end{pmatrix}$$

dove $F = F(L)$.

Il passaggio dalle coordinate di Larmor a quelle del sistema fisso in $s = L + 0$ è dato da

$$\begin{pmatrix} x(L) \\ y(L) \\ x'(L+0) \\ y'(L+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_L(L) \\ y_L(L) \\ x'_L(L) \\ y'_L(L) \end{pmatrix}$$

Dove $F = F(L)$ e $R = R(\omega_0 L)$. Introducendo la matrice J la matrice di permutazione

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}$$

tale che $J^2 = I$ il risultato finale si può scrivere in forma compatta

$$\begin{pmatrix} x(L) \\ x'(L+0) \\ y(L) \\ y'(L+0) \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0-0) \\ y(0) \\ y'(0-0) \end{pmatrix}$$

Espresso in modo esplicito il risultato finale si scrive

$$\begin{pmatrix} x(L) \\ x'(L+0) \\ y(L) \\ y'(L+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 & S & 0 \\ 0 & C & 0 & S \\ -S & 0 & C & 0 \\ 0 & -S & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & \omega_0^{-1}S & 0 & 0 \\ \omega_0 S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & \omega_0^{-1}S \\ 0 & 0 & -\omega_0 S & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0-0) \\ y(0) \\ y'(0-0) \end{pmatrix}$$

dove $C = \cos(\omega_0 L)$ e $S = \sin(\omega_0 L)$. Effettuando il prodotto di matrici il risultato finale assume la forma

$$\begin{pmatrix} x(L) \\ x'(L+0) \\ y(L) \\ y'(L+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 & \omega_0^{-1}CS & CS & \omega_0^{-1}S^2 \\ -\omega_0 CS & C^2 & -\omega_0 S^2 & CS \\ -CS & -\omega_0^{-1}S^2 & C^2 & \omega_0^{-1}CS \\ \omega_0 S^2 & -CS & -\omega_0 CS & C^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0-0) \\ y(0) \\ y'(0-0) \end{pmatrix} \quad (A1)$$

,

Soluzione all'interno del solenoide

Per trovare la soluzione all'interno del solenoide utilizziamo le relazioni espresse dalla equazione (A), che, scritte per le coordinate reali assumono la forma seguente

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = R(\omega_0 s) \begin{pmatrix} x_L(s) \\ y_L(s) \end{pmatrix}$$

e per le loro derivate prime

$$\begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix} = R(\omega_0 s) \begin{pmatrix} x'_L(s) \\ y'_L(s) \end{pmatrix} + \omega_0 R(\omega_0 s) \begin{pmatrix} y_L(s) \\ -x_L(s) \end{pmatrix}$$

La forma finale della mappa per $0 < s < L$ si può scrivere nella forma seguente

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \\ y(s) \\ y'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 & \omega_0^{-1}CS & CS & \omega_0^{-1}S^2 \\ -\omega_0CS & C^2 & -\omega_0S^2 & CS \\ -CS & -\omega_0^{-1}S^2 & C^2 & \omega_0^{-1}CS \\ \omega_0S^2 & -CS & -\omega_0CS & C^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0-0) \\ y(0) \\ y'(0-0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_0CS & -S^2 & \omega_0C^2 & CS \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_0C^2 & -CS & -\omega_0CS & -S^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0-0) \\ y(0) \\ y'(0-0) \end{pmatrix} \quad (A2)$$

dove $C = \cos(\omega_0 s)$ e $S = \sin(\omega_0 s)$. Calcolato in $s = L$ il primo termine dà esattamente la mappa di trasferimento nel sistema fisso dove x' e y' sono valutate in $s = L + 0$. Aggiungendo il secondo termine si ottiene la mappa con x', y' valutate in $s = L - 0$. Pertanto in $s = L$ il secondo termine dà esattamente il contributo dovuto al salto delle derivate prime.

Mappa con kick

Consideriamo ora sempre il solenoide nel limite di sharp edge, che corrisponde a $\lambda \rightarrow 0$ e facciamo una derivazione alternativa che evita il passaggio al sistema rotante con la frequenza di Larmor. Le equazioni da risolvere sono

$$\begin{cases} x'' = 2\omega_0 y' [\vartheta(s) - \vartheta(s-L)] + \omega_0 y [\delta(s) - \delta(s-L)] \\ y'' = -2\omega_0 x' [\vartheta(s) - \vartheta(s-L)] - \omega_0 x [\delta(s) - \delta(s-L)] \end{cases}$$

La presenza della δ impone un salto nelle derivate prime mentre le coordinate x e y sono continue. Infatti integrando su s in $[-\epsilon, \epsilon]$ e mandando ϵ a zero si trova che il primo termine sul lato destro non produce discontinuità in x', y' mentre il secondo ove compare la δ causa un salto in x', y' .

$$\begin{pmatrix} x'(0+0) \\ y'(0+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(0-0) + \omega_0 y(0) \\ y'(0-0) - \omega_0 x(0) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x(+0) \\ y(+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(-0) \\ y(-0) \end{pmatrix}$$

Le coordinate $x(s)$ e $y(s)$ sono continue in $s = 0$ e possiamo indicare con $x(0)$ e $y(0)$ il loro valore.

La propagazione in $0 < z < L$ è poi quella con campo magnetico costante e si ha $\omega(s) = \omega_0$. Ricordiamo allora che posto $Z = x - iy$ e $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ si ha

$$Z'' = 2i\omega_0 Z'$$

La soluzione si scrive

$$Z = Z(0) + \frac{\dot{Z}(0)}{2i\omega_0}(e^{2i\omega_0 s} - 1) \quad \mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(0) + (R(2\omega_0 s) - I)\mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{r}'(0)}{2\omega_0}$$

In forma matriciale possiamo riscrivere il risultato

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} + \frac{1}{2\omega_0} \begin{pmatrix} \cos(2\omega_0 s) - 1 & \sin(2\omega_0 s) \\ -\sin(2\omega_0 s) & \cos(2\omega_0 s) - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y'(0+0) \\ x'(0+0) \end{pmatrix}$$

mentre per le derivate prime si trova

$$\begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\omega_0 s) & \sin(2\omega_0 s) \\ -\sin(2\omega_0 s) & \cos(2\omega_0 s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(0+0) \\ y'(0+0) \end{pmatrix}$$

Possiamo riscrivere la soluzione come funzione delle condizioni iniziali prima dell'ingresso nel solenoide.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -S^2 & CS \\ -CS & -S^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) - \omega_0^{-1}y'(0-0) \\ y(0) + \omega_0^{-1}x'(0-0) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} C^2 & CS \\ -CS & C^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} + \omega_0^{-1} \begin{pmatrix} CS & S^2 \\ -S^2 & CS \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(0-0) \\ y'(0-0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dove come in precedenza $C = \cos(\omega_0 s)$ e $S = \sin(\omega_0 s)$. Verifichiamo immediatamente confrontando con l'equazione (A2) risultato ora ottenuto per $x(s), y(s)$ coincide con quello ottenuto mediante il passaggio al sistema di Larmor. Riesprimiamo anche le derivate prime in funzione delle condizioni iniziali prima dell'ingresso nel solenoide.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C - S^2 & 2CS \\ -2CS & C - S^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(0-0) + \omega_0 y(0) \\ y'(0-0) - \omega_0 x(0) \end{pmatrix} = \\ &= \omega_0 \begin{pmatrix} -2CS & C^2 - S^2 \\ S^2 - C^2 & -2CS \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C^2 - S^2 & 2CS \\ -2CS & C^2 - S^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(0-0) \\ y'(0-0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Anche in questo caso un confronto con la (A2) mostra che anche per $x'(s), y'(s)$ il risultato coincide con quello ottenuto mediante il passaggio al sistema di Larmor.

Per ottenere la mappa all'esterno del solenoide occorre tenere conto della discontinuità in $x'(s)$ e $y'(s)$ per $s = L$ vale a dire

$$\begin{pmatrix} x'(L+0) \\ y'(L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(L-0) - \omega_0 y(L) \\ y'(L-0) + \omega_0 x(L) \end{pmatrix}$$

Notiamo che possiamo riscrivere

$$\begin{pmatrix} x'(L+0) - x'(L-0) \\ y'(L+0) - y'(L-0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0 CS & S^2 & -\omega_0 C^2 & -CS \\ \omega_0 C^2 & CS & \omega_0 CS & S^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0-0) \\ y(0) \\ y'(0-0) \end{pmatrix}$$

la discontinuità è esattamente uguale ed opposta al secondo termine in equazione (A2) e pertanto il risultato ottenuto per la mappa di trasferimento coincide con quello dato dalla equazione (A1)

Bibliografia

- [1] M. Eshraqui et al. Conceptual design of the ESS linac Proceedings of IPAC10 Kyoto MPOD051 (2010) <http://lss.fnal.gov/archive/2010/conf/fermilab-conf-10-754-apc.pdf>
- [2] M. Eshraqui, M. Danared *ESS Linac design and beam dynamics* Proceedings of IPAC 2011 San Sebastian Spain WEPS061 (2011) <http://accelconf.web.cern.ch/accelconf/ipac2011/papers/weps061.pdf>
- [3] S. Gammino *The European Spallation Source linac and the perspectives contribution of INFN to its design update* LNS Report (2010) ESS_LNS_22.10.10.pdf
- [4] M. Sugimoto, M. Kinsho, H. Takeuchi *Concepts of staged approach for IFMIF facility* XX International Linac Conference, Monterey, pag 651 (2000) <http://www.slac.stanford.edu/econf/C000821/TUE16.pdf>
- [5] A. Mosnier *Development of the IFMIF/EVEDA accelerator* Proceedings of PAC09, Vancouver TU2RAI01, pag 663 (2009) <http://epaper.kek.jp/PAC2009/papers/tu2rai01.pdf>
- [6] Derek Stork Demo and the route to fusion power (2009) http://fire.pppl.gov/eu_demo_Stork_FZK%20.pdf
- [7] A. Pisent *IFMIF: the INFN contribution* <https://agenda.infn.it/getFile.py/access?contribId=34&sessionId=5&resId=0&materialId=slides&confId=4687>
- [8] G. Turchetti *Dinamica Classica* Ed. Zanichelli (1998)
- [9] M. Reiser *Theory and Design of Charged Particle Beams* Ed. Wiley (2008)
- [10] G. Turchetti *Geometrical aspects in beam dynamics and ray propagation* Mechanics and Geometry, Ed. P. Fraguglia and G. Turchetti, Ed. Quattroventi, pag 13 (2002)
- [11] S.Fazzini *Tesi di Laurea, Università di Bologna, Trasporto e focalizzazione mediante un solenoide di un fascio di protoni accelerato da un impulso laser, (2011/2012)*
- [13] Immagini Capitolo 1 europeanspallationsource.se